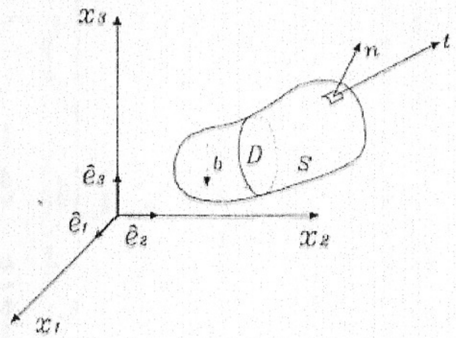
Enunciar el principio del momento lineal de la dinámica y deducir la ecuación del movimiento de la MMC.

"La variación por unidad de tiempo del Momento Lineal de un dominio material es igual a la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre dicho dominio"



$$\frac{D}{Dt}\left(\iiint_D \rho\mathbf{v}dV\right) = \underbrace{\iint_S \mathbf{t}\,dS}_{\text{Fuerzas de superficie}} + \underbrace{\iiint_D \rho\mathbf{b}dV}_{\text{Fuerzas de volumen}} \qquad \frac{D}{Dt}(dV) = (\bar{\nabla}\cdot\bar{v})$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\iiint_D \rho\mathbf{v}dV\right) = \iiint_D \frac{D}{Dt}(\rho\mathbf{v}dV) = \iiint_D \left\{\frac{D}{Dt}(\rho\mathbf{v}) + \rho\mathbf{v}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v})\right\}dV =$$

$$= \iiint_D \left\{\frac{D\rho}{Dt}\mathbf{v} + \rho\mathbf{a} + \rho\mathbf{v}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v})\right\}dV = \iiint_D \left\{\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho\right)\mathbf{v} + \rho\mathbf{a} + \rho\mathbf{v}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v})\right\}dV =$$

$$= \iiint_D \left\{\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho + \rho(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v})\right)\mathbf{v} + \rho\mathbf{a}\right\}dV = \iiint_D \left\{\underbrace{\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\rho\mathbf{v}\right)}_{=0}\mathbf{v} + \rho\mathbf{a}\right\}dV = \iiint_D$$

$$\iint_S \mathbf{t}dS = \iint_S \mathbf{T}\cdot\mathbf{n}dS = \iint_S \mathbf{T}d\mathbf{S} = \iiint_D (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T})\,dV$$

$$\iiint_D \rho\mathbf{a}dV = \iiint_D (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T})\,dV + \iiint_D \rho\mathbf{b}dV \Rightarrow \iiint_D \{(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T}) + \rho\mathbf{b} - \rho\mathbf{a}\}\,dV = 0 \Rightarrow D \text{ arbitrario}: (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T}) + \rho\mathbf{b} - \rho\mathbf{a} = 0$$

Ecuación del Movimiento :

$$(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T}) + \rho\mathbf{b} = \rho\mathbf{a}$$

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho a_i$$

$\mathbf{a} = \mathbf{0} \Rightarrow$ *Ecuación del Equilibrio :*

$$(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T}) + \rho\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0$$

Tensores de tensión de Piola-Kirchhoff: representan la tensión con respecto a la configuración inicial no deformada. Deben su nombre a Gabrio Piola y Gustav Kirchhoff.

Notación:
Tensor de tensión de Cauchy $\mathbf{T}_C = (\sigma_{ij})$
Primer tensor de Piola-Kirchhoff $\mathbf{T}_R = (P_{Ij})$
Segundo tensor tensión de Piola-Kirchhoff: $\mathbf{S}_R = (S_{IJ})$

Tensor de tensión de Cauchy: representa tensiones en la configuración deformada; relaciona las fuerzas en la configuración final deformada con las áreas de la configuración final deformada

En la teoría lineal de la elasticidad debido a que la configuración deformada y la configuración no deformada son prácticamente iguales, se puede usar el tensor de tensiones de Cauchy para representar las tensiones en la configuración inicial no deformada con muy buena aproximación.

Con grandes deformaciones esto no resulta adecuado, y en general se requiere el uso de los tensores de Piola-Kirchhoff.

Existen dos tipos de tensores de Piola-Kirchoff:

- *Primer tensor de Piola-Kirchoff*: tensor mixto que relaciona la configuración inicial no deformada con las tensiones en la configuración deformada.
- *Segundo tensor de Piola-Kirchoff:* tensor simétrico que permite plantear el problema elástico sobre la configuración inicial.

Primer tensor tensión de Piola-Kirchhoff: relaciona las fuerzas en la configuración final deformada con las áreas en la configuración inicial no deformada.
Se relaciona con el tensor de Cauchy mediante:

$$\mathbf{T}_R(\mathbf{X}) = \det(\mathbf{F})\ \mathbf{T}_C(\mathbf{x})\mathbf{F}$$

$$\mathbf{F}_{iJ} = \frac{\partial x_i}{\partial X_J}$$

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$P_{Ii} = \left|\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)}\right| \frac{\partial X_I}{\partial x_j}\sigma_{ij} = \det(\mathbf{F})\ \frac{\partial X_I}{\partial x_i}\sigma_{ij}$$

Puesto que este tensor relaciona magnitudes de diferentes sistemas coordenados es un tensor de "dos puntos" o tensor mixto. En general, este tensor no será simétrico.

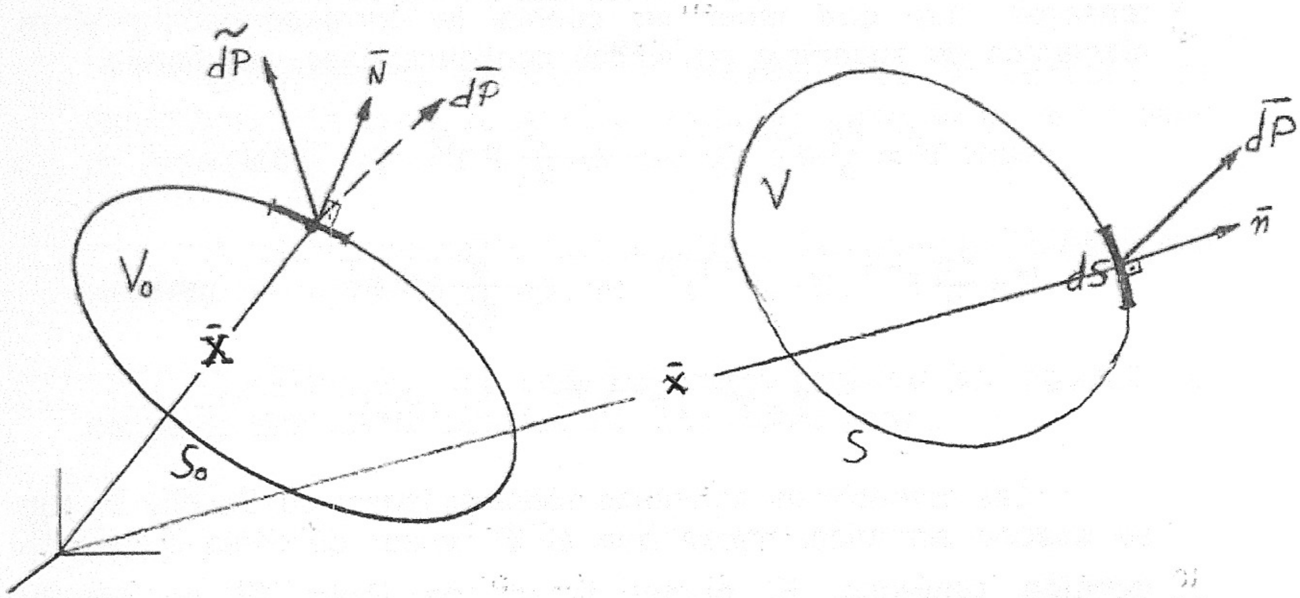
Segundo tensor tensión de Piola-Kirchhoff: relaciona fuerzas y áreas sobre la configuración inicial no deformada, y por tanto constituye un tensor ordinario (no mixto); al igual que el tensor tensión de Cauchy, es simétrico.

Las fuerzas sobre la configuración inicial de referencia se obtienen proyectando las fuerzas sobre la configuración deformada, a través de isomorfismo que relaciona ambas geometrías.
La relación entre el segundo tensor de Piola-Kirchhoff y el tensor tensión de Cauchy viene dado por:

$$\mathbf{S}_R(\mathbf{X}) = \det(\mathbf{F})\ \mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}_C(\mathbf{x})\mathbf{F}$$

$$S_{IJ} = \left|\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)}\right| \frac{\partial X_I}{\partial x_i}\frac{\partial X_J}{\partial x_j}\sigma_{ij} = \det(\mathbf{F})\ \frac{\partial X_I}{\partial x_i}\frac{\partial X_J}{\partial x_j}\sigma_{ij}$$

Relación entre los tensores de tensión:



a) Configuración de referencia $t=t_0$.

b) Configuración deformada $t=t$.

$$\vec{t} = \frac{\overline{dP}}{dS} = T_C \cdot \hat{n}$$

$$\vec{t}_0 = \frac{\overline{dP}}{dS_0} = T_R \hat{N}$$

$$\tilde{t} = \frac{\widetilde{dP}}{dS_0} = S_R \cdot \hat{N}$$

$$\vec{t} = \frac{\overline{dP}}{dS} = T_C \cdot \hat{n}$$

$$\frac{\overline{dP}}{J\,dS_0} = T_C F \hat{N}$$

$$\frac{\overline{dP}}{dS_0} = J T_C F \hat{N} = T_R \hat{N}$$

$$\boxed{T_R = J\, T_C\, F}$$

$$\hat{t} = \frac{\widetilde{dP}}{dS_0} = \frac{F^{-1}\overline{dP}}{dS_0} = F^{-1} T_R \hat{N} = S_R \hat{N}$$

$$\boxed{S_R = F^{-1} T_R = J F^{-1} T_C F}$$

ECUACIONES CONSTITUTIVAS:

Tensiones, deformaciones, cinemática, leyes de conservación: solo se ha tenido en cuenta la continuidad del medio

¿cómo interviene la constitución material de cada medio?: ecuaciones constitutivas

modelo matemático que describe el comportamiento del material ante cargas y temperaturas

Desacoplamiento térmico-mecánico: relaciones tensión-deformación

Ecs constitutivas: se deducen por experimentación o por consideraciones teóricas

---

PLANTEAMIENTO DE UN PROBLEMA DE CONTINUO

Desacoplamiento termomecánico

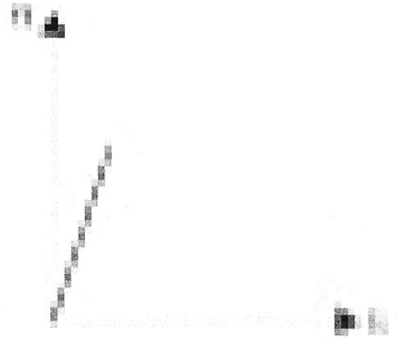
Ec. continuidad: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{V}) = 0$: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho V_i)_{,i} = 0$ (1)

Ec. movimiento: $\bar{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}} + \rho \bar{b} = \rho \bar{a}$: $\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i$ (3)

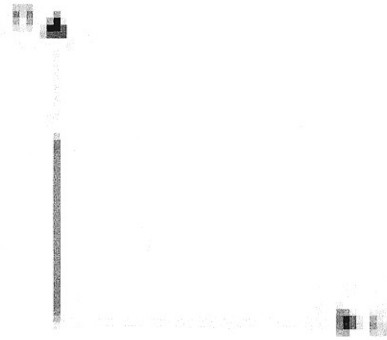
Incógnitas: ρ, V_i, σ_{ij} (10)

Son necesarias 6 ecuaciones constitutivas

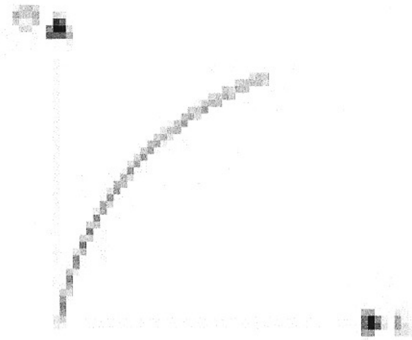
- Condiciones de contorno
- Condiciones iniciales



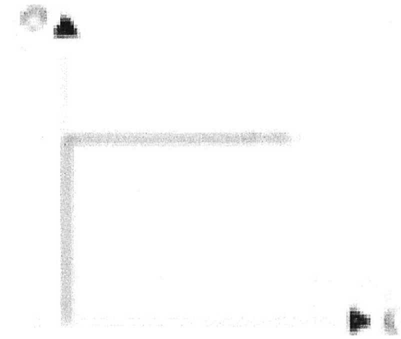
Elástico lineal



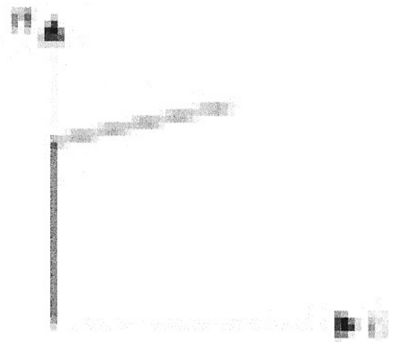
Rígido



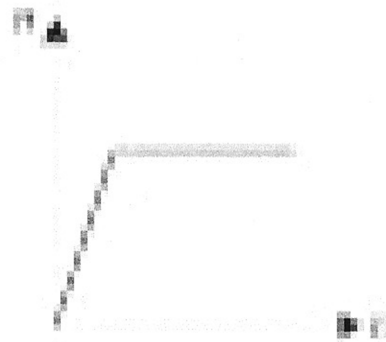
Elástico no lineal



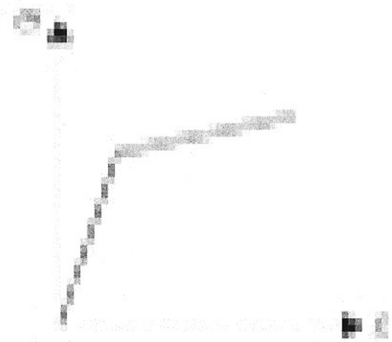
Rígido-plástico ideal



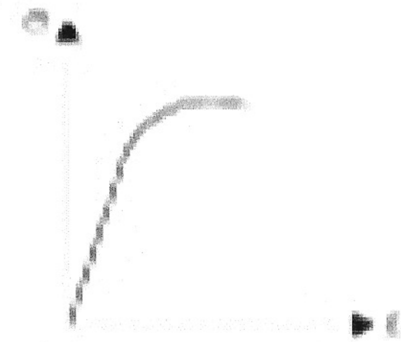
Rígido-plástico con endurecimiento lineal



Elástico-plástico ideal



Elástico-plástico con endurecimiento lineal



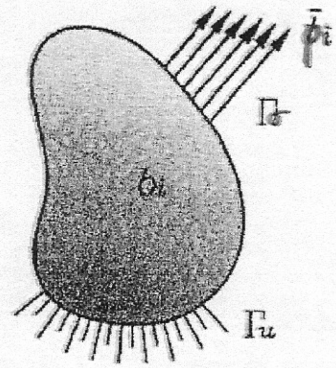
Elástico-plástico con endurecimiento no li

PROBLEMA ELASTOSTÁTICO EN MEDIOS ELÁSTICOS LINEALES HOMOGÉNEOS:

	VARIABLES ESTÁTICAS		VARIABLES CINEMATICAS
VARIABLES EXTERNAS	$b_i, \bar{t}_i$	$\longrightarrow$	$u_i, \bar{u}_i$
VARIABLES INTERNAS	σ_{ij}	$\overset{\bar{u}_i}{\longleftrightarrow}$	ε_{ij}

Ecs. equilibrio:

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0$$



Rel. cinemát

$$\varepsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Ecs. constitutivas:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda e \delta_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} = ((1+\nu)/E)\sigma_{ij} - (\nu/E)\sigma_{kk}\delta_{ij} \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$

Esquema general de la Elasticidad

15 incógnitas & 15 ecuaciones $\Rightarrow$ Ecs. Navier-Cauchy: $\mu u_{i,jj} + (\lambda+\mu) u_{j,ji} + b_i = 0$

Ecs. Beltrami Michell: $\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} = -(b_{i,j}+b_{j,i}) - \frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij} b_{k,k}$

$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} = -(b_{i,j}+b_{j,i}) - \frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij} b_{k,k}$

Condiciones de contorno:

$$\begin{cases} \Gamma_u : u_i = \bar{u}_i \\ \Gamma_\sigma : p_i = \bar{p}_i = \sigma_{ij} \ell_j \\ \Gamma_{u\sigma} : \begin{cases} u_i = \bar{u}_i \\ i \neq j \\ p_j = \bar{p}_j \end{cases} \end{cases}$$

$$\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma \cup \Gamma_{u\sigma}$$

$$\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \phi \quad \Gamma_u \cap \Gamma_{u\sigma} = \phi \quad \Gamma_\sigma \cap \Gamma_{u\sigma} = \phi$$

Dirichlet: $\Gamma \equiv \Gamma_u$ solución única

Newman: $\Gamma \equiv \Gamma_t$:
- solución en tensiones única
- solución en desplazamientos se le pueden añadir infinitos desplazamientos de sólido rígido