Derivación del jacobiano:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix}$$

$$\frac{D}{Dt}\left[\frac{\partial x_i}{\partial X_l}\right] = \frac{\partial}{\partial X_l}\left(\frac{Dx_i}{Dt}\right) = \frac{\partial v_i}{\partial X_l} = \frac{\partial v_i}{\partial x_s}\frac{\partial x_s}{\partial X_l}$$

Si llamamos $x_{i,P} = \frac{\partial x_i}{\partial X_P} \Rightarrow$

$$J = \varepsilon_{PQR}\, x_{1,P}\, x_{2,Q}\, x_{3,R}$$

$$\dot{J} = \varepsilon_{PQR}\left(\dot{x}_{1,P}\, x_{2,Q}\, x_{3,R} + x_{1,P}\, \dot{x}_{2,Q}\, x_{3,R} + x_{1,P}\, x_{2,Q}\, \dot{x}_{3,R}\right)$$

$$\dot{J} = \varepsilon_{PQR}\left(v_{1,s}\, x_{s,P}\, x_{2,Q}\, x_{3,R} + x_{1,P}\, v_{2,s}\, x_{s,Q}\, x_{3,R} + x_{1,P}\, x_{2,Q}\, v_{3,s}\, x_{s,R}\right)$$

desarrollando la suma en s :

$$\dot{J} = \varepsilon_{PQR}\begin{pmatrix} v_{1,1}x_{1,P}x_{2,Q}x_{3,R} + \overbrace{v_{1,2}x_{2,P}x_{2,Q}x_{3,R}}^{=0} + \overbrace{v_{1,3}x_{3,P}x_{2,Q}x_{3,R}}^{=0} + \\ 0 = + x_{1,P}v_{2,1}x_{1,Q}x_{3,R} + x_{1,P}v_{2,2}x_{2,Q}x_{3,R} + x_{1,P}v_{2,3}x_{3,Q}x_{3,R} + = 0 \\ + \underbrace{x_{1,P}x_{2,Q}v_{3,1}x_{1,R}}_{=0} + + \underbrace{x_{1,P}x_{2,Q}v_{3,2}x_{2,R}}_{=0} + x_{1,P}x_{2,Q}v_{3,3}x_{3,R} \end{pmatrix}$$

de los nueve determinantes, seis son nulos por repetir vectores filas,

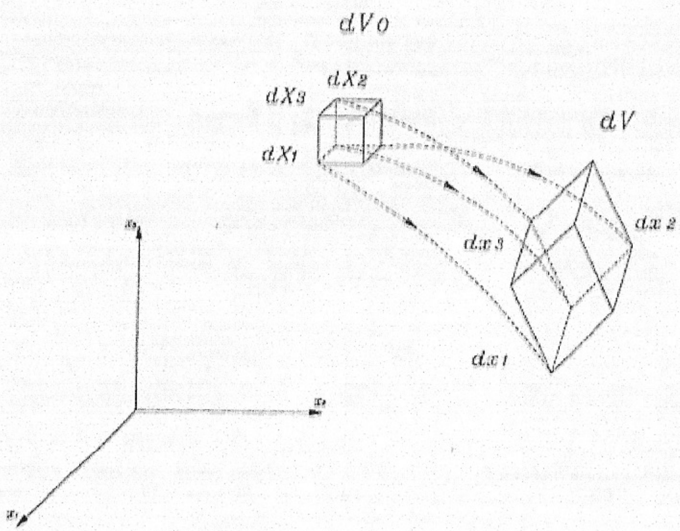
$$\dot{J} = \varepsilon_{PQR}\left(v_{1,1}x_{1,P}x_{2,Q}x_{3,R} + x_{1,P}v_{2,2}x_{2,Q}x_{3,R} + x_{1,P}x_{2,Q}v_{3,3}x_{3,R}\right) = \varepsilon_{PQR}v_{s,s}x_{1,P}x_{2,Q}x_{3,R} =$$

$$\dot{J} = J\left(\nabla \cdot \mathrm{v}\right)$$

Derivada material de elementos diferenciales de volumen. Consideramos, por sencillez en la exposición per restar por ello generalidad al planteamiento, el elemento de volumen dV_o, cuyas aristas son paralelas a los ejes coorden

La consideración de la hipótesis simplificativa: *deformación localmente homogénea* nos permite hacer las siguientes co eraciones:

Las partículas materiales que se distribuian $(t = t_o)$ sobre el elemento lineal dX_i, se distribuyen $(t = t)$ sobre el elem dx_i. Las partículas materiales que ocupaban $(t = t_o)$ el elemento dV_o, ocupan (t) el elemento dV. **El paralelepíped traslada, se distorsiona, pero no se subdivide.**



$$d\mathbf{S}' = \mathbf{F} d\mathbf{S} \Rightarrow \begin{cases} d\mathbf{x}_1 = \left(\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) dX_1 \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dX_1 \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dX_1 \right) \\ d\mathbf{x}_2 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} dX_2 \quad \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) dX_2 \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dX_2 \right) \\ d\mathbf{x}_3 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} dX_3 \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dX_3 \quad \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) dX_3 \right) \end{cases}$$

$$dV = d\mathbf{x}_1 \cdot (d\mathbf{x}_2 \wedge d\mathbf{x}_3) = |\mathbf{F}|\, dV_o = J dV_o$$

$$\frac{D}{Dt}(dV) = \frac{DJ}{Dt} dV_o = \frac{DJ}{Dt}\frac{dV}{J} = \frac{1}{J}\frac{DJ}{Dt} dV = \cancel{\frac{D}{Dt}(\ln J)\, dV} = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v})\, dV$$

$\left(\frac{DJ}{Dt} = J\, \vec{\nabla} \cdot \vec{v}\right)$

Derivada material de integrales de volumen

Algunas propiedades se definen como integrales sobre una región finita de un medio continuo:

$$P(t) = \iiint_{\Omega} A(\mathbf{x},t)\,d\Omega$$

$$\frac{D}{Dt}[P(t)] = \frac{D}{Dt}\left[\iiint_{\Omega} A(\mathbf{x},t)\,d\Omega\right] = \frac{D}{Dt}\left[\iiint_{\Omega_o} A^*(\mathbf{X},t)J\,d\Omega_o\right] =$$

$$= \iiint_{\Omega_o} \frac{D}{Dt}[A^*(\mathbf{X},t)J]\,d\Omega_o = \iiint_{\Omega_o}\left\{\frac{\partial}{\partial t}[A^*(\mathbf{X},t)J] + (\nabla(A^*(\mathbf{X},t)J))\bullet\mathbf{v}\right\}d\Omega_o =$$

$$= \iiint_{\Omega_o} \frac{\partial}{\partial t}[A^*(\mathbf{X},t)J\,d\Omega_o] + \iiint_{\Omega_o}\{(\nabla(A^*(\mathbf{X},t)J\,d\Omega_o))\bullet\mathbf{v}\} =$$

$$= \iiint_{\Omega}\left\{\frac{\partial}{\partial t}[A(\mathbf{x},t)\,d\Omega] + (\nabla(A\ \ (\mathbf{x},t)\,d\Omega))\bullet\mathbf{v}\right\} = \iiint_{\Omega}\frac{D}{Dt}[A(\mathbf{x},t)\,d\Omega]$$

los símbolos de integración y derivada material son permutables pero afectando a todo el conjunto integrando-diferencial.

Densidad : $\rho(P,t)$ magnitud intensiva escalar que caracteriza la materia en cada punto.

Masa: magnitud extensiva escalar $\qquad m = \iiint_D \rho(P,t)\,dV$

Principio de conservación de la masa: la masa de un dominio material permanece constante.
(dominio material: en cada instante las mismas partículas)

$$\frac{D}{Dt}(m) = 0$$

$$\frac{D}{Dt}(m) = \frac{D}{Dt}\left[\iiint_D \rho(P,t)\,dV\right] = \iiint_D \frac{D}{Dt}\left[\rho\, dV\right] = \iiint_D \frac{D}{Dt}[\rho]\,dV + \rho\,\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\,dV = \iiint_D \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\rho\cdot\vec{V} + \rho\,\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right)dV =$$

$$= \iiint_D \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{\nabla}\cdot\rho\vec{V})\right] = 0$$

para cualquier dominio material $\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\rho\vec{V} = 0}$ ec. continuidad en forma euleriana

Conservación de la masa en descripción lagrangiana.

Principio de conservación de la masa:

$$m(D_o) = m(D_t) \Rightarrow \int_{D_o} \rho_o(\mathbf{X})\,dv_o = \int_{D_t} \rho(\mathbf{x},t)\,dv = \int_{D_o} \rho(\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t)\,J(\mathbf{X},t)\,dv_o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{D_o} \{\rho_o(\mathbf{X}) - \rho(\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t)\,J(\mathbf{X},t)\}\,dv_o = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_o(\mathbf{X}) - \rho(\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t)\,J(\mathbf{X},t) = 0 \Rightarrow \rho_o(\mathbf{X}) = \rho(\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t)\,J(\mathbf{X},t) \Rightarrow \rho J = \rho_o \Rightarrow \boxed{\frac{D}{Dt}(J\rho) = 0}$$

ec. continuidad lagrangiana

Demostrar que las formas material y espacial de la ecuación de la continuidad son equivalentes:

$$\frac{D}{Dt}(J\rho) = 0 \Rightarrow \frac{DJ}{Dt}\rho + J\frac{D\rho}{Dt} = 0 \Rightarrow J(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v})\rho + J\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\boldsymbol{\nabla}\rho)\cdot\mathbf{v}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J\left((\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v})\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\boldsymbol{\nabla}\rho)\cdot\mathbf{v}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0$$

Prof.: Javier Suárez Medina

CONSERVACION DE LA MASA. ECUACION DE CONTINUIDAD.

* CAMPO DENSIDAD ESTACIONARIO : $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ ECUAC. CONTINUIDAD: $\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ CAMPO CANTIDAD DE MOVIMIENTO ESPECIFICA
CAMPO CAUDAL MASICO
SOLENOIDAL

* MOVIMIENTO ISOVOLUMEN $\Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = 0 \Rightarrow$ ECUAC. CONTINUIDAD: $\rho \operatorname{div} \vec{V} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{V} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ CAMPO VELOCIDADES
CAMPO CAUDAL VOLUMICO
SOLENOIDAL

* CAMPO DENSIDAD HOMOGENEO : en un instante t, $\forall$ punto ρ = cte. $\Rightarrow \vec{\operatorname{grad}}\, \rho = 0 \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} =$

$\Rightarrow$ ECUAC. CONTINUIDAD: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0$

* MEDIO HOMOGENEO
MOVIMIENTO ISOVOLUMEN $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{\operatorname{grad}}\, \rho = 0 \\ \operatorname{div} \vec{V} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0 \Rightarrow$ ECUAC. CONTINUIDAD $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$\Rightarrow$ LA DENSIDAD ES UNA CONSTANTE

$\left.\begin{array}{l} \text{CAMPO VELOCIDADES} \\ \text{CAMPO CANTIDAD DE MOVIMIENTO ESPECIFICA} \end{array}\right\}$ SOLENOIDALES

Derivada material de integrales de volumen en movimiento isovolumen.

Movimiento isovolumen: el volumen de cualquier dominio material permenece constante.

$$dV = J dV_o = dV_o \Rightarrow J = 1$$

$$dV = \frac{dm}{\rho} = \frac{dm}{\rho_o} \Rightarrow \rho = \rho_o$$

$$\frac{DJ}{Dt} = J\left(\nabla \cdot \mathbf{v}\right) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$P_{ij\ldots}(t) = \iiint\limits_{\Omega} A_{ij\ldots}(\mathbf{x}, t)\, d\Omega$$

$$\frac{D}{Dt}\left[P_{ij\ldots}(t)\right] = \frac{D}{Dt}\left[\iiint_{\Omega} A_{ij\ldots}(\mathbf{x}, t)\, d\Omega\right] = \iiint\limits_{\Omega} \frac{D}{Dt}\left[A_{ij\ldots}(\mathbf{x}, t)\, d\Omega\right] = \iiint\limits_{\Omega} \frac{D}{Dt}\left[A_{ij\ldots}(\mathbf{x}, t)\right.$$

los símbolos de integración y derivada material son permutables.