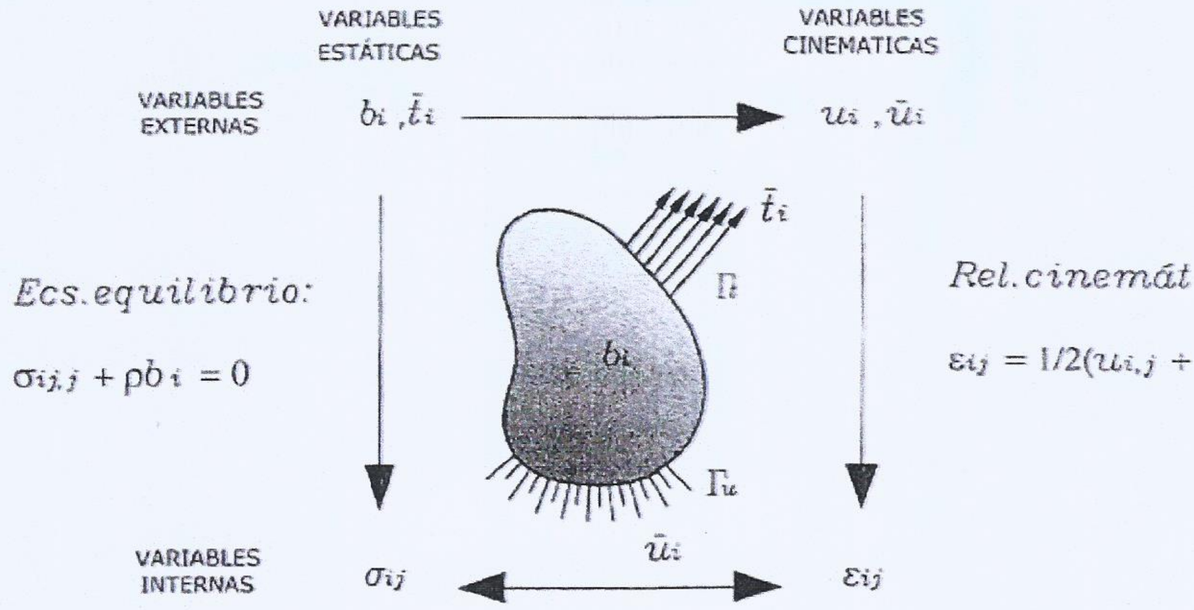
Los elementos estructurales se deforman.
Una barra de material flexible, por ejemplo caucho, sometida a un sistema de cargas en equilibrio que tiende a alargarla (tracción) o a retorcerla (torsión) o a doblarla (flexión); el efecto inmediato que se observa es la aparición de un **campo de desplazamientos**.

El objetivo es la determinación del campo de desplazamientos.

PROBLEMA ELASTOSTÁTICO EN MEDIOS ELÁSTICOS LINEALES HOMOGÉNEOS:

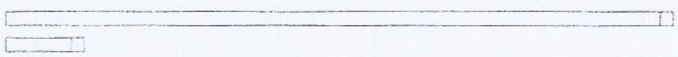


Ecs. constitutivas:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda e\,\delta_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} = ((1+\nu)/E)\sigma_{ij} - (\nu/E)\sigma_{kk}\delta_{ij}$$

El campo de desplazamientos no es indicativo del proceso:



$L_1 = 50cm \quad \Delta L = 1cm \quad separación: 2\%$

$L_2 = 5cm \quad \Delta L = 1cm \quad separación: 20\%$

el campo de desplazamientos no es indicativo del cambio de posición relativa, no es adecuado para caracterizar el efecto que las acciones exteriores producen sobre un sólido.

Necesitamos trabajar con magnitudes nuevas.

¿Cómo ordenar los conceptos de tensión y deformación, estado tensional, estado deformacional?.

Algunos textos introducen en primer lugar el concepto de deformación y de sólido deformado, lo que tiene su lógica si pensamos que las tensiones solo pueden generarse en la geometría deformada.

Sin embargo el concepto de tensión es más intuitivo y más facilmente asimilable. El concepto de deformación es más abstracto y puede requerir un mayor esfuerzo de comprensión, esfuerzo que puede venir aliviado por la asimilación previa del concepto de estado tensional.

Prof.: Javier Suárez Medina

Análisis de deformaciones: propiedades intrínsecas de la deformación independientemente de las causas físicas que la producen.

Transformación: desplazamientos + cambio de forma

Partículas y Puntos. Configuración

Punto: posición en un espacio fijo.
Partícula: pequeño elemento de volumen de un medio continuo.
Configuración de un medio continuo: Identificación de las partículas del medio continuo con los puntos del espacio que ocupan en el instante t.

Deformación y Flujo

Deformación: Cambio de forma experimentado por el medio continuo entre dos configuraciones.
Configuración no deformada-Configuración deformada
Configuración inicial-Configuración final

En el estudio de las deformaciones no se presta ninguna atención a las configuraciones intermedias, a la secuencia particular de configuraciones entre la inicial y la final.

Flujo: estado continuo de movimiento de un medio continuo. Secuencia temporal de configuraciones. Campos cinemáticos dependientes del tiempo.

Conocidas la configuración inicial y final, ¿determinar el cambio de longitud y de dirección del elemento infinitesimal que une dos puntos próximos cualesquiera.

Sólido rígido: no existe variación entre las posiciones relativas de las partículas del sólido; la distancia entre cualesquiera dos puntos permanece inalterable. Todas las configuraciones posibles que este tipo de sólidos puede ocupar en el espacio se diferencian en una traslación y una rotación

Sólido deformable: aparece una alteración entre las distancias de los diferentes puntos materiales. El objetivo es determinar el campo de desplazamientos que acompaña al cambio de posiciones relativas entre las partículas, sin perjuicio de que sobre este campo de desplazamientos pueda haber superpuesto un desplazamiento como sólido rígido, que no es objeto de interés en el análisis de deformaciones.

Mecánica del continuo: el hecho de que el medio continuo lo siga siendo pese al cambio relativo de posiciones, despues de la aplicación de las cargas exteriores, implica que el campo de desplazamientos que experimenta el sólido es continuo y univaluado, por lo que puntos que estan en el entorno de un punto siguen estando en su entorno despues de la deformación, aunque ocupando posiciones relativas diferentes.

¿Que sería preciso especificar para poder establecer la geometría del sólido deformado a partir de la del sólido indeformado? La llave para la descripción del estado deformado es la definición del cambio de distancia entre dos puntos.

El cambio de posiciones relativas entre partículas debe de hacerse a traves de magnitudes adimensionales.

Utilizaremos como llave el cambio de de distancia entre puntos, **magnitud fundamental de la deformación:** $(dS')^2 - (dS)^2$

Formulación lagrangiana: expresa la posición actual x_i de la partícula que ocupaba el punto X_i en t=0; expresa la configuración final en función de la configuración inicial.

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) = x_i(\mathbf{X}, t) \quad \text{o} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$$

Formulación euleriana: proporciona una reproducción de la posición original de la partícula que ahora ocupa la posición x_i.

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t) = X_i(\mathbf{x}, t) \quad \text{o} \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$$

Ambas formulaciones son inversas la una respecto de la otra, siempre que el jacobiano de la transformación no se anule.
Ejemplo:

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 + X_2(e^t - 1) \\ x_2 &= X_1(e^{-t} - 1) + X_2 \\ x_3 &= X_3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} X_1 &= \frac{-x_1 + x_2(e^t - 1)}{1 - e^t - e^{-t}} \\ X_2 &= \frac{x_1(e^{-t} - 1) - x_2}{1 - e^t - e^{-t}} \\ X_3 &= x_3 \end{aligned}$$

Gradientes de Deformación. Gradientes de Desplazamiento

Gradiente de deformación material: $F_{ij} = \dfrac{\partial x_i}{\partial X_j}$

Gradiente de deformación espacial: $H_{ij} = \dfrac{\partial X_i}{\partial x_j}$

Gradiente de deslazamiento material: $J_{ij} = \dfrac{\partial u_i}{\partial X_j}$

Gradiente de deslazamiento espacial: $K_{ij} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\frac{\partial X_j}{\partial x_k} = \delta_{ik} \qquad \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial X_k} = \delta_{ik}$$

$$F \cdot H = I \qquad H \cdot F = I$$

$$u_i = x_i - X_i \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial X_j} = \dfrac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij} \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \dfrac{\partial X_i}{\partial x_j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J = F - I \\ K = I - H \end{cases}$$

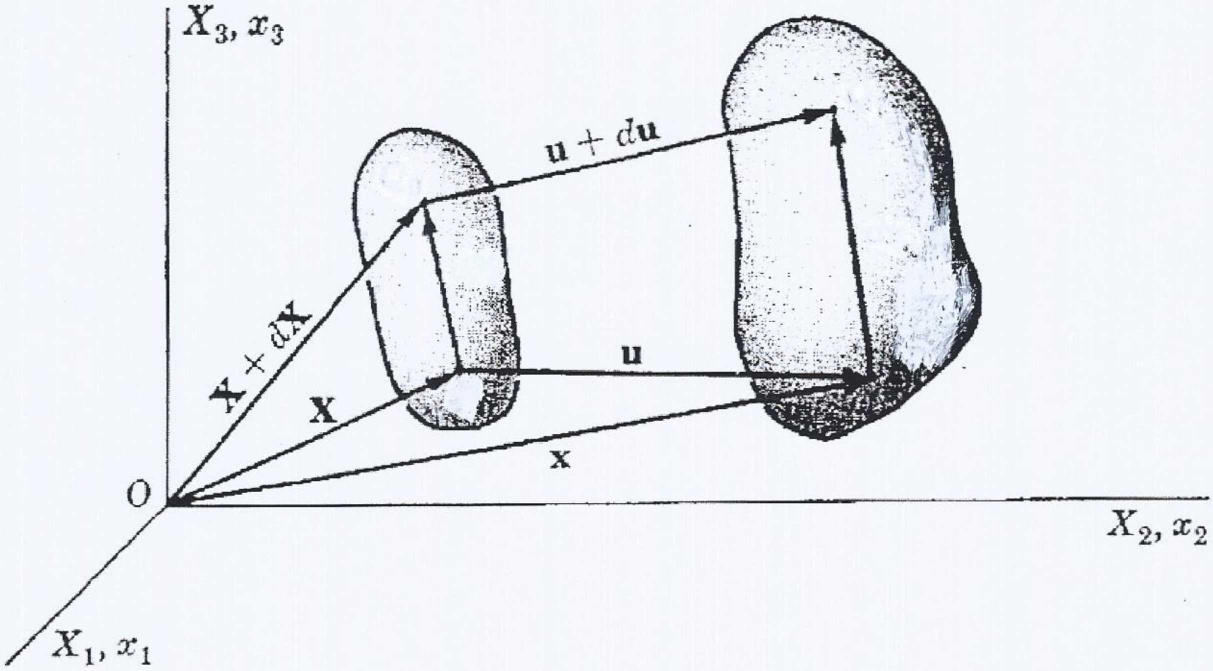
Ejemplo:

Dado el campo de desplazamientos $u = X_1 X_3^2 \hat{e}_1 + X_1^2 X_2 \hat{e}_2 + X_2^2 X_3 \hat{e}_3$, hallar las matrices F, J:

$$x = u + X$$

$$\begin{cases} x_1 = X_1(1 + X_3^2) \\ x_2 = X_2(1 + X_1^2) \\ x_3 = X_3(1 + X_2^2) \end{cases} \quad F = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \begin{pmatrix} 1 + X_3^2 & 0 & 2X_1X_3 \\ 2X_1X_2 & 1 + X_1^2 & 0 \\ 0 & 2X_2X_3 & 1 + X_2^2 \end{pmatrix} \quad J = F - I = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \begin{pmatrix} X_3^2 & 0 & 2X_1X_3 \\ 2X_1X_2 & X_1^2 & 0 \\ 0 & 2X_2X_3 & X_2^2 \end{pmatrix}$$

Vector de Posición. Vector Desplazamiento



$$\vec{AB} = \vec{dS} \qquad \vec{dS} + \vec{u} + \vec{du} = \vec{u} + \vec{dS}'$$

$$\vec{dS} = dX_i\,\hat{e}_i \qquad \vec{dS}' = \vec{dS} + \vec{du}$$

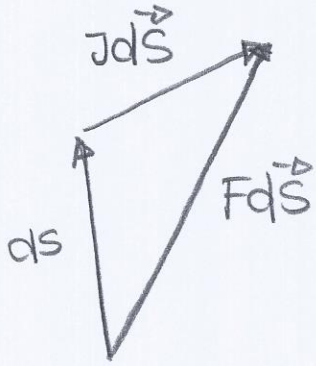
$$\vec{dS}' = dx_i\,\hat{e}_i \qquad dx_i = dX_i + du_i = dX_i + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} dX_k + \dots$$

$$\vec{du} = du_i\,\hat{e}_i$$

linealizamos la variación del desplazamiento despreciando términos de orden superior

$$dx_i = dX_i + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} dX_k = \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k}\right) dX_k = F_{ik}\,dX_k \Rightarrow \vec{dS}' = F \cdot \vec{dS}$$

$$\vec{du} = ds' - ds = (F - I)\,\vec{dS} = J \cdot \vec{dS}$$



F $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ } Endomorfismo en VG
Transformación puntual lineal en EGO : { Recta → Recta
Plano → Plano
Rectas, Planos // → //

Tensor de deformación finita lagrangiano:

Formulación lagrangiana: $x_i = x_i(X_j,t) \Rightarrow dx_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j : \cancel{ds' = Fds}$ $\quad \vec{ds}' = F\cdot \vec{dS}$

$$(ds')^2 = \vec{ds}' \cdot \vec{ds}' = dx_i dx_i = \delta_{ij} dx_i dx_j$$

$$(ds')^2 = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \frac{\partial x_i}{\partial X_k} dX_k = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}\frac{\partial x_i}{\partial X_k} dX_j dX_k$$

Formulación euleriana: $X_i = X_i(x_j,t) \Rightarrow dX_i = \dfrac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j \quad \cancel{ds = Hds'}$ $\quad \vec{dS} = H\,\vec{ds}'$

$$dS^2 = \vec{ds} \cdot \vec{ds} = dX_i dX_i = \delta_{ij} dX_i dX_j$$

$$dS^2 = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j \frac{\partial X_i}{\partial x_k} dx_k = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\frac{\partial X_i}{\partial x_k} dx_j dx_k$$

expresamos la magnitud fundamental de la deformación:

$$(ds')^2 - (dS)^2 = \frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} dX_i dX_j - \frac{\partial X_m}{\partial x_n}\frac{\partial X_m}{\partial x_o} dx_n dx_o =$$

$$= \frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} dX_i dX_j - \frac{\partial X_m}{\partial x_n}\frac{\partial X_m}{\partial x_o}\frac{\partial x_n}{\partial X_i}\frac{\partial x_o}{\partial X_j} dX_i dX_j$$

$$= \frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} dX_i dX_j - \delta_{mi}\delta_{mj} dX_i dX_j =$$

$$= \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) dX_i dX_j = 2L_{ij} dX_i dX_j$$

$$Lij = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right):$$ Tensor de deformación finita lagrangiano;

componentes ε_{ij} / simétrico $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$

$$(ds')^2 - (dS)^2 = \vec{ds}^{\,t} \cdot 2L \cdot \vec{ds} = 2\varepsilon_{ij} dX_i dX_j$$

$$L = \frac{1}{2}(F^T F - I) \qquad (ds')^2 - (ds)^2 = ds^T 2L ds = 2\varepsilon_{ij} dX_i dX_j$$

se expresa en función del gradiente de desplazamiento:

$$Lij = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u_k}{\partial X_i} + \delta_{ki} \right)\left(\frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \delta_{kj} \right) - \delta_{ij} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \Rightarrow \quad \Rightarrow L_{ij} = \frac{1}{2}(J + J^T + J^T J)$$

$$L = \frac{1}{2}\left(J + J^t + J^t \cdot J \right)$$

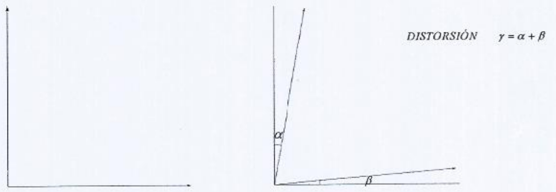
Significado geométrico de las componentes del tensor de deformación finita lagrangiano:
Conceptos físicos:

Elongación de un elemento lineal AB : alargamiento unitario: $E_{AB} = \dfrac{ds' - ds}{ds}$

Elongación de los elementos inicialmente paralelos a los ejes coordenados: E_{x_1}, E_{x_2} y E_{x_3}

Distorsión angular: variación experimentada por el ángulo recto $\gamma = \alpha + \beta$

Distorsión de elementos inicialmente paralelos a los planos coordenados: γ_{12}, γ_{13} y γ_{23}



Cambio de longitud del elemento lineal genérico: **dS**: **AB**
Elongación según la dirección AB:

$$E_{AB} = \frac{ds' - ds}{ds} = \frac{ds'}{ds} - 1 \Rightarrow ds' = (E_{AB} + 1)ds$$

$$\left.\begin{array}{l} (ds')^2 - (ds)^2 = (E_{AB} + 1)^2 ds^2 - ds^2 = E_{AB}(E_{AB} + 2)ds^2 \\ (ds')^2 - (ds)^2 = 2\varepsilon_{ij} dX_i dX_j \end{array}\right\} \Rightarrow E_{AB}(E_{AB} + 2)ds^2 = 2\varepsilon_{ij} dX_i dX_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{AB}(E_{AB} + 2) = 2\varepsilon_{ij} \frac{dX_i}{ds}\frac{dX_j}{ds} = 2\varepsilon_{ij} l_i l_j \Rightarrow E_{AB}(\frac{E_{AB}}{2} + 1) = \varepsilon_{ij} l_i l_j$$

La elongación en un punto según una dirección queda determinada conociendo el tensor de deformación en dicho punto.

Definición: deformación en un punto según una dirección:

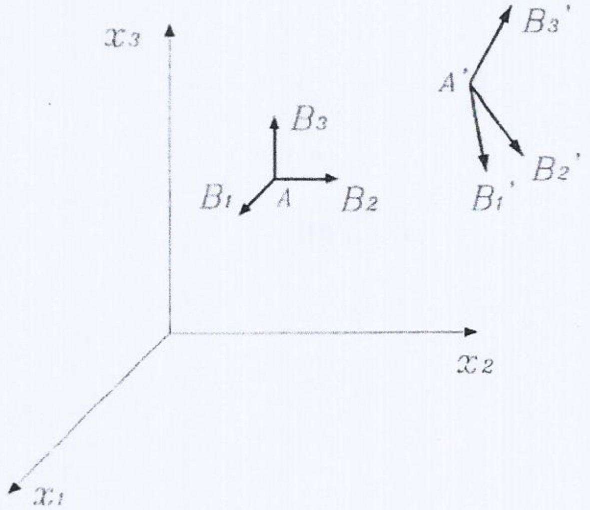
$$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_{ij} l_i l_j \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{AB} = E_{AB}\left(1 + \frac{E_{AB}}{2}\right) \\ E_{AB} = \pm\sqrt{1 + 2\varepsilon_{AB}} - 1 \end{array} \right.$$

Elongación en las direcciones coordenadas:

$$ds : (1,0,0) \Rightarrow E_{x_1}\left(\frac{E_{x_1}}{2} + 1\right) = \varepsilon_{11} \Rightarrow E_{x_1} = \pm\sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} - 1$$
$$ds : (0,1,0) \Rightarrow E_{x_2}\left(\frac{E_{x_2}}{2} + 1\right) = \varepsilon_{22} \Rightarrow E_{x_2} = \pm\sqrt{1 + 2\varepsilon_{22}} - 1$$
$$ds : (0,0,1) \Rightarrow E_{x_3}\left(\frac{E_{x_3}}{2} + 1\right) = \varepsilon_{33} \Rightarrow E_{x_3} = \pm\sqrt{1 + 2\varepsilon_{33}} - 1$$

Las componentes diagonales del tensor de deformación están relacionadas con las elongaciones en las direcciones coordenadas.

Cambios de dirección de elementos inicialmente paralelos a los ejes coordenadas



tensor de deformación de Green $:G_{ij} = \dfrac{\partial x_k}{\partial X_i}\dfrac{\partial x_k}{\partial X_j}:$ $\qquad \mathbf{G} = \mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F} \qquad (dS')^2 = d\mathbf{S}^t \cdot \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S}$

$$\cos(A'B_1', A'B_2') = \frac{\mathbf{A'B_1'} \cdot \mathbf{A'B_2'}}{|\mathbf{A'B_1'}||\mathbf{A'B_2'}|} = \{ds' = \mathbf{F}ds\} = \frac{(\mathbf{F}\cdot\mathbf{AB}_1)\cdot(\mathbf{F}\cdot\mathbf{AB}_2)}{|\mathbf{A'B_1'}||\mathbf{A'B_2'}|} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} (ds')^2 = G_{ij}dX_idX_j = d\mathbf{s}^t \cdot \mathbf{G} \cdot ds \\ |\mathbf{A'B_i'}| = \sqrt{(\mathbf{AB}_i)^t \cdot \mathbf{G} \cdot (\mathbf{AB}_i)} \end{array} \right\} = \frac{(\mathbf{AB}_1)^t \cdot \mathbf{F}^t\mathbf{F} \cdot (\mathbf{AB}_2)}{\sqrt{(\mathbf{AB}_1)^t \cdot \mathbf{G} \cdot (\mathbf{AB}_1)}\sqrt{(\mathbf{AB}_2)^t \cdot \mathbf{G} \cdot (\mathbf{AB}_2)}} =$$

$$= \frac{\hat{e}_1^t \cdot \mathbf{G} \cdot \hat{e}_2}{\sqrt{\hat{e}_1^t \cdot \mathbf{G} \cdot \hat{e}_1}\sqrt{\hat{e}_2^t \cdot \mathbf{G} \cdot \hat{e}_2}} = \left\{ \sqrt{\hat{e}_i^t \cdot \mathbf{G} \cdot \hat{e}_i} = ds' = \tfrac{ds'}{ds} = (E_{x_i} + 1) \right\} =$$

$$= \frac{\hat{e}_1^t \cdot \mathbf{G} \cdot \hat{e}_2}{(1+E_{x_1})(1+E_{x_2})} = \{\mathbf{G} = 2\mathbf{L} + \mathbf{I}\} = \frac{\hat{e}_1^t \cdot 2\mathbf{L} \cdot \hat{e}_2 + \hat{e}_1^t \cdot \mathbf{I} \cdot \hat{e}_2}{(1+E_{x_1})(1+E_{x_2})} = \frac{\hat{e}_1^t \cdot 2\mathbf{L} \cdot \hat{e}_2}{(1+E_{x_1})(1+E_{x_2})} =$$

$$= \frac{2\varepsilon_{12}}{(1+E_{x_1})(1+E_{x_2})} = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \gamma_{12}\right) = \sin\gamma_{12}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin\gamma_{12} = \dfrac{2\varepsilon_{12}}{(1+E_{x_1})(1+E_{x_2})} \\ \sin\gamma_{13} = \dfrac{2\varepsilon_{13}}{(1+E_{x_1})(1+E_{x_3})} \\ \sin\gamma_{23} = \dfrac{2\varepsilon_{23}}{(1+E_{x_2})(1+E_{x_3})} \end{array} \right.$$

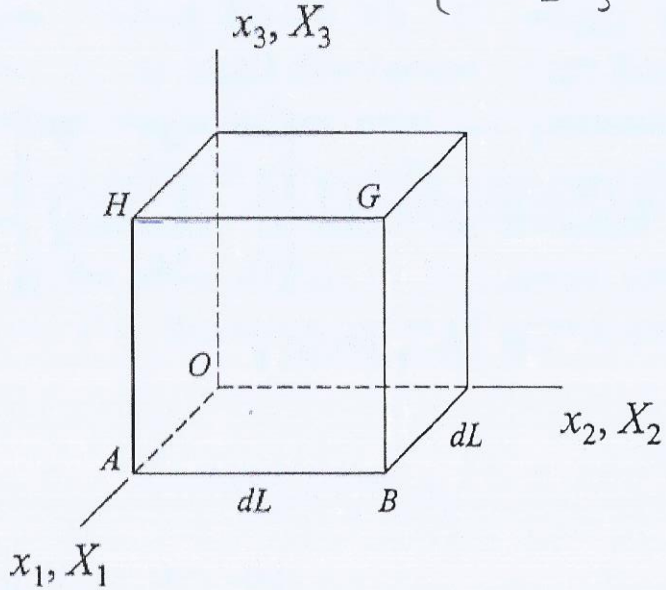
$\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}$: *no son las distorsiones angulares propiamente dichas, pero sirven para definirlas.*

Ejemplo: Transformación $\begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = X_2 + k X_3 \\ x_3 = X_3 + k X_2 \end{cases}$ $k = \text{cte.}$

$H(dL, 0, dL) \rightarrow h(dL, kdL, dL)$

$B(dL, dL, 0) \rightarrow b(dL, dL, kdL)$

$G(dL, dL, dL) \rightarrow g(dL, (1+k)dL, (1+k)dL)$



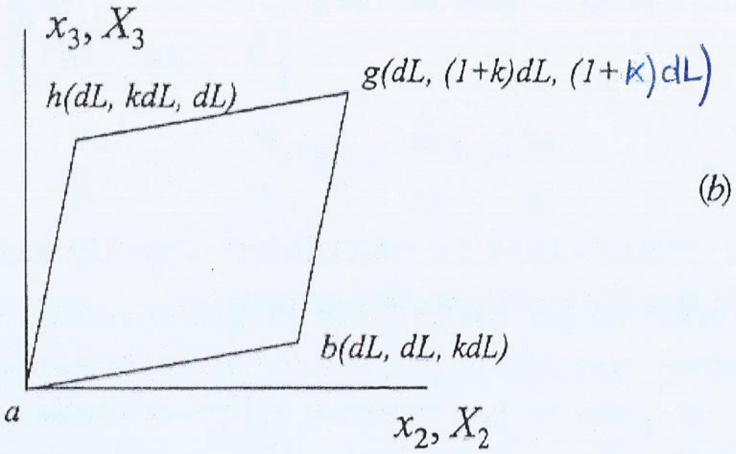
(a)

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix} \qquad 2L = (F^t F - I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & 2k \\ 0 & 2k & k^2 \end{pmatrix}$$

$$(ds)^2 - (dS)^2 = 2L_{ij}\, dX_i\, dX_j = (dX_1, dX_2, dX_3)\, 2L \begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{pmatrix}$$

Diagonal AG: $(0, dL, dL)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & 2k \\ 0 & 2k & k^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ dL \\ dL \end{pmatrix} = 2(k^2 + 2k)dL^2$

Diagonal BH: $(0, -dL, dL)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & 2k \\ 0 & 2k & k^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -dL \\ dL \end{pmatrix} = 2(k^2 - 2k)dL^2$



(b)

Diagonal OG: $(dL, dL, dL)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & 2k \\ 0 & 2k & k^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dL \\ dL \\ dL \end{pmatrix} = 2(k^2 + 2k)dL^2$

$k = 0{,}25$ $\begin{cases} \text{Diagonal AG: } (ds)^2 - (dS)^2 = 1{,}125\, dL^2 \\ \text{Diagonal BH: } (ds)^2 - (dS)^2 = -0'875\, dL^2 \\ \text{Diagonal OG: } (ds)^2 - (dS)^2 = 1{,}125\, dL^2 \end{cases}$

Prof.: Javier Suárez Medina