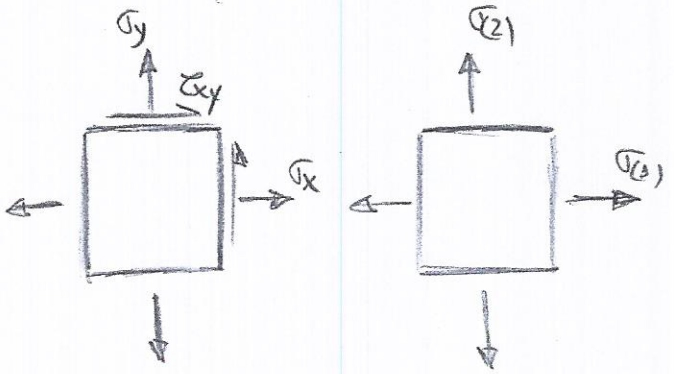
ET Plano : TENSIONES PRINCIPALES

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \qquad |T-\lambda I| = 0 \qquad \begin{vmatrix} \sigma_x-\lambda & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (\sigma_x-\lambda)(\sigma_y-\lambda)-\tau_{xy}^2 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda(\sigma_x+\sigma_y) + \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0$$

$$\lambda = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2}$$

$$\begin{cases} \sigma_{(1)} = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_{(2)} = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{cases}$$



ET Plano : Criterio de Von Mises

$$(\sigma_{(1)}-\sigma_{(2)})^2 + (\sigma_{(1)}-\sigma_{(3)})^2 + (\sigma_{(2)}-\sigma_{(3)})^2 = 2\sigma_f^2$$

$$\sigma_{(2)} = 0 \Rightarrow \quad \sigma_{(1)}^2 + \sigma_{(3)}^2 + (\sigma_{(1)}-\sigma_{(3)})^2 = 2\sigma_f^2 \Rightarrow \quad \sigma_{(1)}^2 + \sigma_{(3)}^2 + \sigma_{(1)}^2 + \sigma_{(3)}^2 - 2\sigma_{(1)}\sigma_{(3)} = 2\sigma_f^2$$

$$\sigma_{(1)}^2 + \sigma_{(3)}^2 - \sigma_{(1)}\sigma_{(3)} = \sigma_f^2 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 + \cancel{2\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}}$$

$$\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 - \cancel{2\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}}$$

$$-\left[\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2 - \cancel{\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}} + \cancel{\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}} - \left[\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right]\right] = \sigma_f^2$$

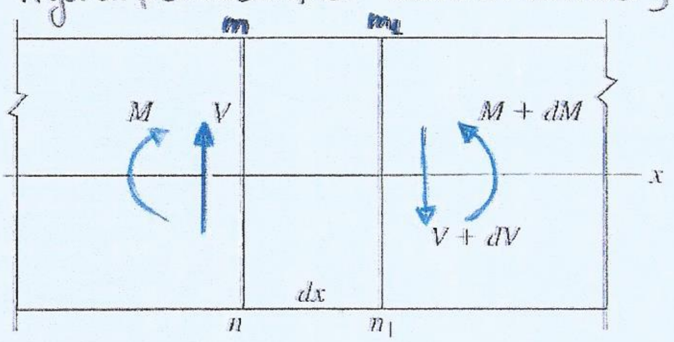
$$\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_f^2$$

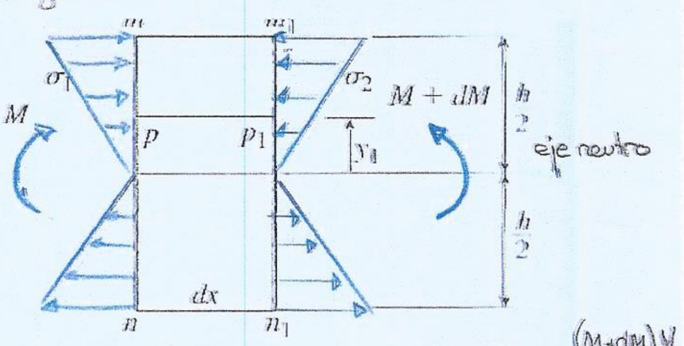
$$\frac{1}{4}\left[\sigma_x^2+\sigma_y^2+2\sigma_x\sigma_y+3\sigma_x^2+3\sigma_y^2-6\sigma_x\sigma_y\right] + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_f^2 \qquad \boxed{\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_x\sigma_y+3\tau_{xy}^2 = \sigma_f^2}$$

Prof.: Javier Suárez Medina

FORMULA DE LA TENSION TANGENCIAL:

Viga en flexión simple: tensiones normales y tangenciales sobre ambas caras





$\sigma_2 = -\dfrac{(M+dM)y}{I}$

Vista lateral de la viga

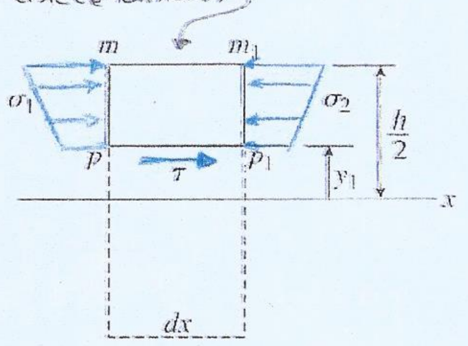
(a)

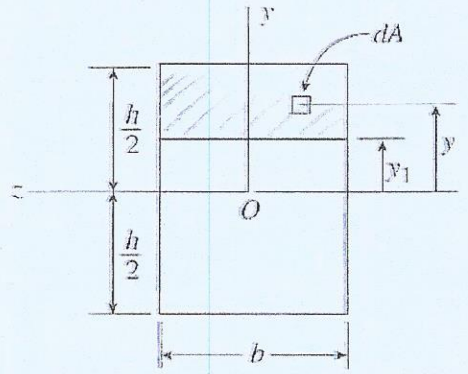
$\sigma_1 = -\dfrac{My}{I}$

Vista lateral del elemento

(b)

las tensiones tangenciales sobre mn, m_1n_1 no afectan al equilibrio horizontal





Vista lateral del subelemento

(c)

Sección transversal en el subelemento

(d)

Determinamos las tensiones tangenciales que actúan sobre capas de la viga.

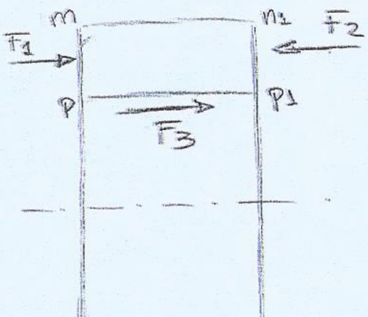
El principio de las tensiones conjugadas

sabemos que las verticales tienen la misma magnitud.

Si la viga estuviese en flexión pura, $\sigma_1 = \sigma_2$, las tensiones tangenciales serían nulas ($V = 0$).
Si no hay cortantes no hay tensiones tangenciales.

Elemento de área dA en el lado izquierdo: $\sigma_1 dA = \dfrac{My}{I} dA$

$$F_1 = \int \sigma_1 dA = \int \frac{My}{I} dA$$



$$F_2 = \int \sigma_2 dA = \int \frac{(M+dM)y}{I} dA$$

$$F_3 = F_2 - F_1 = \int \frac{dM\,y}{I} dA = \frac{dM}{I} \int y\,dA$$

$$F_3 = \tau b\,dx$$

Formula del cortante

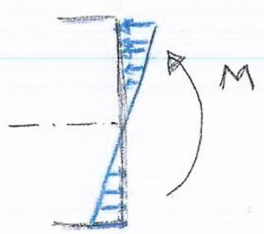
$$\boxed{\tau = \underset{\overset{\shortparallel}{V}}{\frac{dM}{dx}} \left(\frac{1}{Ib}\right) \int y\,dA = \frac{V}{Ib} \underbrace{\int y\,dA} = \frac{VQ}{Ib}}$$

Momento estático del área transversal por encima del nivel de evaluación de tensiones Q

las tensiones tangenciales en la misma dirección que el esfuerzo cortante.

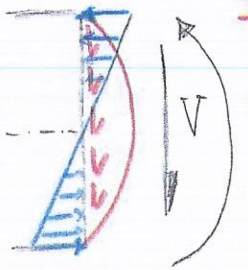
FLEXIÓN:

$\sigma = -\dfrac{My}{I}$



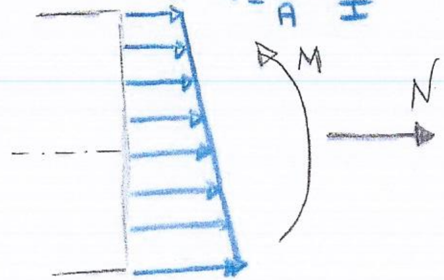
FLEXIÓN
PURA

$\tau = \dfrac{VQ}{Ib}$



FLEXION
SIMPLE

$\sigma = \dfrac{N}{A} - \dfrac{My}{I}$



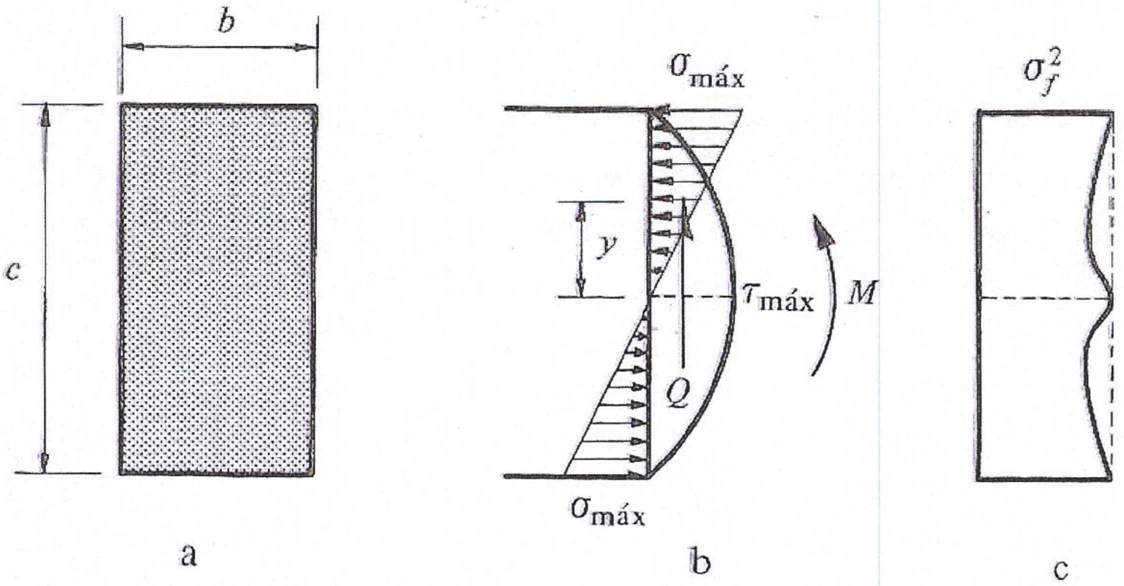
FLEXION
COMPUESTA

Prof.: Javier Suárez Medina

FLEXION SIMPLE: el cociente entre momento y cortante es constante.

s/ Von Mises: se produce la plastificación de una fibra: $\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_f^2$ $\begin{cases} \sigma_f \\ \tau_f = \frac{\sigma_f}{\sqrt{3}} \end{cases}$

Sección rectangular: no hay posibilidad de plastificación en fibras intermedias



$$\sigma_y = \sigma_{máx} \frac{2y}{c}$$

$$\left.\begin{array}{l} \tau_y = \frac{V}{I}\left[\left(\frac{c}{2}-y\right)y + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}-y\right)^2\right] \\ \tau_{máx} = \frac{V}{I}\frac{c^2}{8} \end{array}\right\} \quad \tau_y = \tau_{máx}\left[1-\left(\frac{2y}{c}\right)^2\right]$$

Criterio de plastificación:

Valores máximos de $f(\sigma,\tau)$ $\begin{cases} \sigma_{máx} = \sigma_f \\ \tau_{máx} = \sigma_f/\sqrt{3} \end{cases}$

$$f(\sigma,\tau) = \sigma_y^2 + 3\tau_y^2 = \left(\frac{2y}{c}\right)^2\sigma_{máx}^2 + 3\left[1-\left(\frac{2y}{c}\right)^2\right]^2\tau_{máx}^2$$

$$f(\sigma,\tau) = \left[1-\left(\frac{2y}{c}\right)^2+\left(\frac{2y}{c}\right)^4\right]\sigma_f^2$$

Valores máximos de $f(\sigma,\tau)$: $\begin{cases} y=0 & \text{fibra neutra} \\ y=\frac{c}{2} & \text{fibras extremas} \end{cases}$

la acción combinada de tensiones normales y tangenciales no puede producir la plastificación en ninguna fibra;

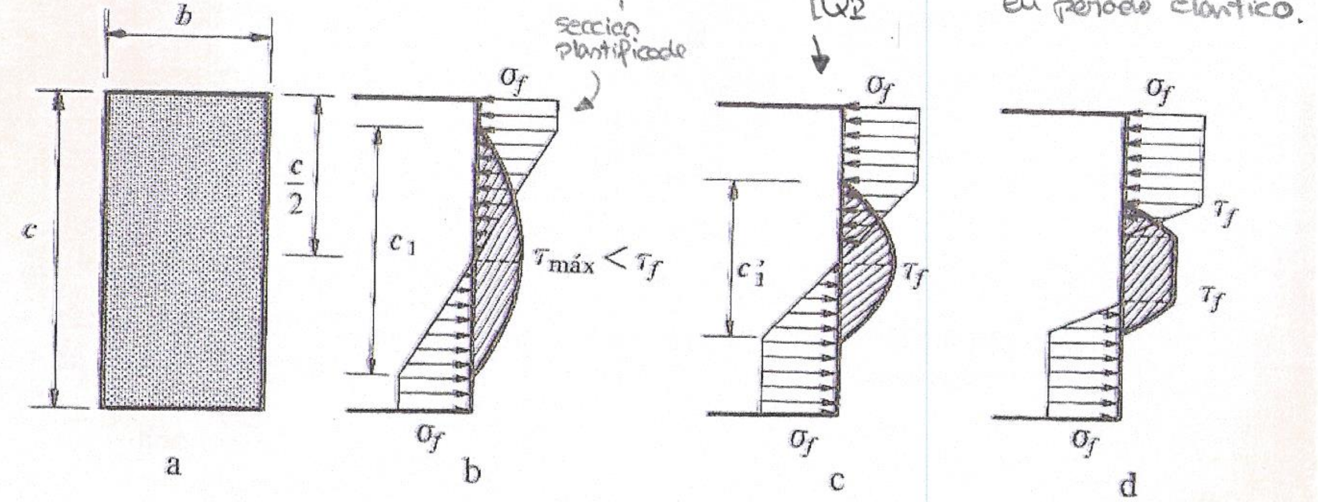
o comienza en las fibras extremas como consecuencia del momento

o comienza en la fibra neutra como consecuencia del cortante

Se supone plastificación por fibras extremas: $\sigma_{máx} = \sigma_f$
$\tau_{máx} < \tau_f$

se admite plastificación completa: $\begin{cases} M'_p \\ Q'_p \end{cases}$

No se pueden cumplir simult. las hipótesis de - Navier
- Hooke
en período elástico.



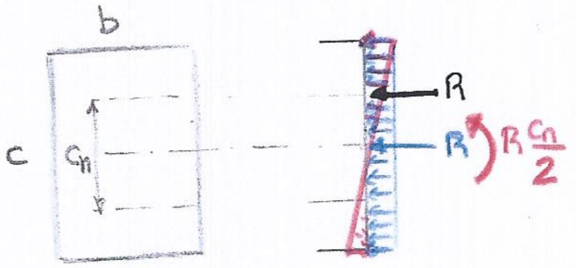
no se puede sobrepasar τ_f
al aumentar Q, aumenta área de aplicación

en las fibras plastificadas
$\left\{ \begin{array}{l} \tau = 0 \\ \text{el esfuerzo cortante solo se reparte en la parte de la sección} \\ \text{que trabaje elásticamente} \end{array} \right.$

Incremento de esfuerzos ⇒ las zonas plásticas se extienden hacia el interior
aumenta $\tau_{máx}$: - aumentan esfuerzos
- disminuye la zona elástica

NUCLEO CENTRAL: si el punto de aplicación de la resultante está contenido en el núcleo central, las tensiones tienen el mismo signo.

Sección rectangular:



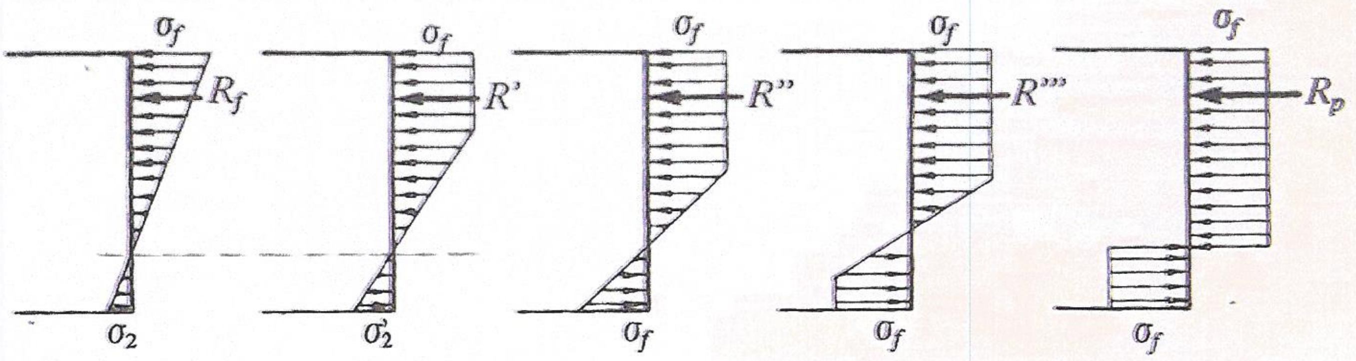
$$\frac{R\frac{c_n}{2}\frac{c}{2}}{\frac{1}{12}bc^3} = 3\frac{Rc_n}{bc^2} = \frac{R}{bc} \Rightarrow c_n = \frac{c}{3}$$

Prof.: Javier Suárez Medina

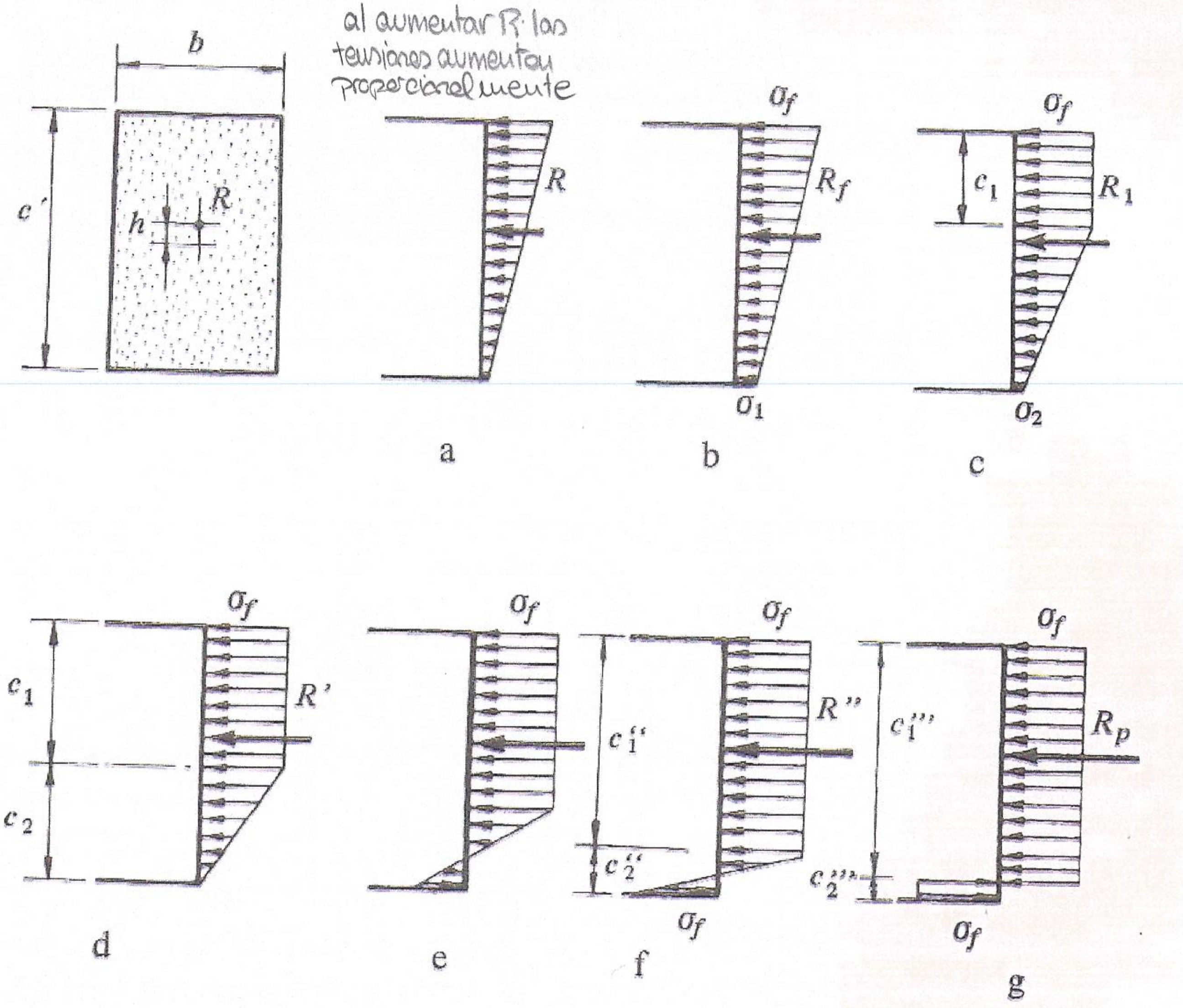
FLEXION COMPUESTA: la resultante se aplica fuera del núcleo central

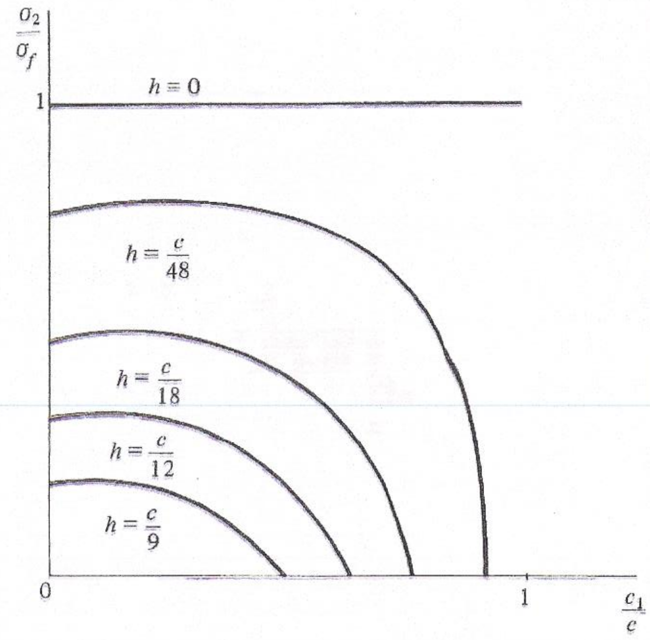
se admite que al aumentar R se conserva la excentricidad $= \frac{M}{N}$

régimen elástico: $\sigma = \frac{N}{\Omega} \pm \frac{My}{I}$



COMPRESION o TRACCION COMPUESTA: la resultante se aplica en el núcleo central.





Prof. Javier Suárez Medina