ANALISIS DEL MOVIMIENTO

MOVIMIENTO
FLUJO : TERMINOS USADOS PARA DESCRIBIR EL CAMBIO CONTINUO O INSTANTANEO EN LA CONFIGURACION DE UN MEDIO CONTINUO

FLUJO : ALGUNAS VECES ENCIERRA LA IDEA DE UN MOVIMIENTO QUE CONDUCE A UNA DEFORMACION PERMANENTE : PLASTICIDAD
NO ES ASI : FLUJO DE FLUIDOS : MOVIMIENTO CONTINUO

DESCRIPCION MATERIAL O LAGRANGIANA DEL MOVIMIENTO : CENTRA SU ATENCION EN LAS PARTICULAS ESPECIFICAS DEL MEDIO CONTINUO

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) = x_i(\vec{X}, t) \qquad \vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t)$$

DESCRIPCION ESPACIAL O EULERIANA DEL MOVIMIENTO : SE INTERESA POR UNA REGION PARTICULAR DEL ESPACIO OCUPADO POR EL M.C.

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t) = X_i(\vec{x}, t) \qquad \vec{X} = \vec{X}(\vec{x}, t)$$

POR SER TRANSFORMACIONES MATEMATICAS RECIPROCAS : CUALQUIER PROPIEDAD FISICA DEL MEDIO CONTINUO EXPRESADA RESPECTO A UNA PARTICULA ESPECIFICA TAMBIEN SE PUEDE EXPRESAR RESPECTO A LA POSICION PARTICULAR DEL ESPACIO OCUPADO POR LA PARTICULA

POR EJEMPLO : SI CONOCEMOS LA DENSIDAD $\rho = \rho(X_i, t) = \rho(X_i(\vec{x}, t), t) = \rho^*(x_i, t)$ LA FORMA FUNCIONAL DE LA DESCRIPCION EULERIANA DE UNA PROPIEDAD NO ES NECESARIAMENTE LA MISMA QUE LA FORMA LAGRANGIANA

Prof.: Javier Suárez Medina

Derivada convectiva

La derivada convectiva es una generalización de la derivación con respecto del tiempo.

La derivada convectiva relaciona el ritmo de variación con el tiempo de una propiedad de una partícula material (es decir, en la descripción lagrangiana) con el ritmo de variación temporal de la propiedad instantánea en un punto fijo del espacio (es decir, en la descripción euleriana).

$$\mathbf{D}/\mathbf{D}t = \partial/\partial t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla$$

Fijemos nuestra atención en una partícula material, es decir, adoptemos una descripción lagrangiana:

la partícula material está identificada por su posición de partida $\boldsymbol{X}_0$.

la partícula material tiene una propiedad $C_l(t,\boldsymbol{X}_0)$.

por ejemplo la temperatura de una partícula de aire.

esta propiedad varía al transcurrir el tiempo con un ritmo $(d/dt)\ C_l(t,\boldsymbol{X}_0)$.

Ahora fijemos nuestra atención en un punto fijo del espacio, es decir, adoptemos una descripción euleriana:

el punto está identificado mediante el símbolo $\boldsymbol{x}$

en cada instante, nuestro punto del espacio está ocupado por una partícula material, pero las partículas materiales pueden moverse, así que la que ocupa el punto fijo del espacio puede variar con el tiempo

podemos asignarle una propiedad $C_e(t,\boldsymbol{x})$ a nuestro punto fijo; esta propiedad es la de la partícula material que lo ocupa en cada instante.

por ejemplo, esta propiedad es la temperatura medida por un termómetro fijo metido dentro de una corriente de aire.

el ritmo de variación temporal de la propiedad del punto es $(\partial/\partial t)\ C_e(t,\boldsymbol{x})$

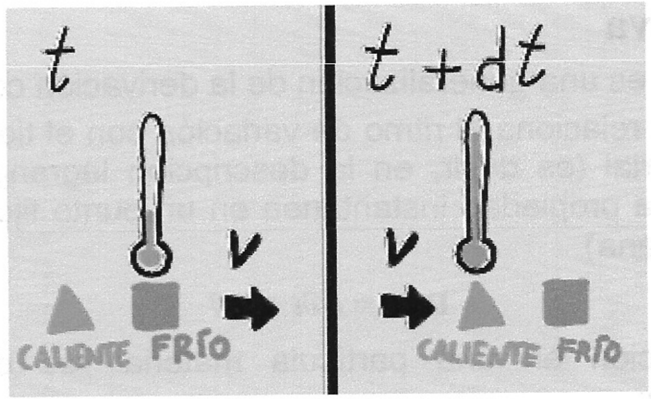
Hemos definido la derivada temporal de la partícula material (la de la descripción lagrangiana) y la derivada temporal del punto fijo en el espacio (la de la descripción euleriana).

En un momento dado, la partícula material $\boldsymbol{X}_0$ puede ocupar el punto del espacio $\boldsymbol{x}$. En ese momento, la propiedad del punto, $C_e(t,\boldsymbol{x})$ es la de la partícula que lo ocupa, $C_l(t,\boldsymbol{X}_0)$. Las derivadas temporales, en cambio, no tienen por qué ser iguales.

Esto es obvio matemáticamente (tenemos dos funciones distintas que sólo coinciden en un instante dado);

ejemplo del aire y el termómetro fijo; supongamos que justo tras la partícula de aire que estamos estudiando viene otra mucho más caliente; en tal caso, la medida del termómetro subirá muy deprisa, pero la partícula de aire original se calienta muy despacio, ya que tiene muy mala conductividad térmica.

Prof.: Javier Suárez Medina



En el instante t, la partícula fría se encuentra a la altura del termómetro fijo. En el instante $t + dt$, la partícula caliente ha pasado a ocupar su lugar. El termómetro se ha calentado muy deprisa, pero cada partícula conserva su temperatura.

Relación entre las dos derivadas: la derivada convectiva

Las partículas materiales se mueven.

en cada punto x podemos medir la velocidad instantánea de la partícula que lo ocupa y definir, con ello, un campo de velocidades $\boldsymbol{v}(t,x)$.

los puntos del espacio están fijos; el campo de velocidades es la velocidad a la que las partículas materiales atraviesan cada punto.

fijémonos en un punto fijo del espacio x ; en el instante t, sus propiedades son $C_e(t,x)$

tras un cortísimo espacio de tiempo dt, sus propiedades habrán pasado a valer

$$C_e(t + dt, x) = C_e(t, x) + (\partial/\partial t)\, C_e(t, x)dt$$

de igual manera, si mantenemos fijo el tiempo y pasamos a medir a un punto próximo $x + dx$ (separado por una distancia infinitesimal), las propiedades pasan a valer

$$C_e(t, x + dx) = C(t, x) + \nabla C(t, x) \cdot dx$$

Fijémonos en la partícula material X_0.

en el instante t, ocupa la posición del espacio x y se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}(t, x)$

tras un cortísimo espacio de tiempo, en el instante $t + dt$, pasa a la posición $x + \boldsymbol{v}(t, x)\, dt$, es decir, experimenta un desplazamiento infinitesimal $dx = \boldsymbol{v}(t, x)\, dt$.

sus propiedades pasan del valor $C_l(t, X_0) = C_e(t+dt, x+dx)$

Con lo que sabemos del párrafo anterior, deducimos que el incremento $dC_l(t, x)$ de las propiedades entre ambos instantes es

$$dC_l(t,x) = (\partial/\partial t)C_e(t, x)\, dt + \nabla C_e(t,x) \cdot \boldsymbol{v}(t,x)\, dt$$

Si dividimos entre el incremento infinitesimal de tiempo dt, obtenemos la relación entre la derivada temporal de la partícula material y las derivadas parciales temporal y espacial de la descripción euleriana:

$$(d/dt)C_l = (\partial/\partial t)C_e + \boldsymbol{v} \cdot \nabla C_e \equiv (D/Dt)C_e$$

Hemos introducido el símbolo

$$D/Dt \equiv (\partial/\partial t) + \boldsymbol{v}\, \nabla$$

para referirnos a la *derivada convectiva* o *derivada sustancial*.

El nombre se debe al término dependiente de la velocidad; el *término convectivo*, que es el que describe los cambios de las propiedades en un punto debido al desplazamiento de las partículas materiales, es decir, la *convección*.

DESCRIPCIONES LAGRANGIANA Y EULERIANA DE LA TRANSFORMACION DE UN MEDIO CONTINUO:
Cuando un medio continuo sufre una transformación (confq. inicial a confq. final):

Descripción LAGRANGIANA: $x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t)$

posición actual de la partícula que ocupaba el punto (X_1, X_2, X_3) en el instante $t=0$
distribución detallada de la forma que adquiere la configuración final correspondiente a una configuración inicial

Descripción EULERIANA: $X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t)$ proporciona una reproducción de la posición original de la partícula que ahora ocupa la posición (x_1, x_2, x_3)

Ambas formulaciones representan *transformaciones matemáticas* recíprocas: se despejan la una de la otra $\Rightarrow$ Los Jacobianos de ambas transformaciones son inversos el uno del otro.
La condición necesaria y suficiente para que exista una función inversa es que el jacobiano $J = \left|\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right|$ no se anule.

$0 < J(X,t) < +\infty$

Ejemplo:

$$x_1 = X_1 + X_2(e^t - 1)$$
$$x_2 = X_1(e^{t} - 1) + X_2$$
$$x_3 = X_3$$

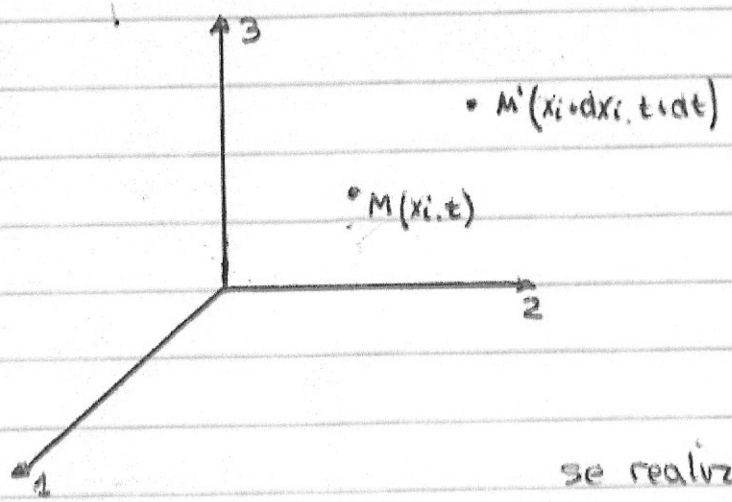
$$X_1 = \frac{-x_1 + x_2(e^t - 1)}{1 - e^t - e^{-t}}$$
$$X_2 = \frac{x_1(e^{-t} - 1) - x_2}{1 - e^t - e^{-t}}$$
$$X_3 = x_3$$

Prof.: Javier Suárez Medina

ANALISIS DEL MOVIMIENTO. CONCEPTO DE DERIVADA MATERIAL:

Sea P propiedad tensorial del medio continuo. $\Rightarrow$ Expresión euleriana de P: $P(x_i, t)$

Expresión lagrangiana de P: $P^*(X_i, t)$



Para estudiar la variación de la propiedad P en un punto $M(x_i, t)$, consideramos otro punto $M'(x_i+dx_i, t+dt)$ y por la hipótesis de continuidad establecemos:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial P}{\partial t} dt$$

Decimos que la diferenciación o derivación es material: cuando se realiza siguiendo la partícula en el curso de su movimiento

La posición del punto M' no es arbitraria: $\vec{MM'} = \vec{V}\cdot dt \quad dx_i = v_i dt$

La variación que mediría un observador que viaja con la partícula.

Expresión lagrangiana de P: $P(X_i, t) \Rightarrow \quad DP = \frac{\partial P}{\partial X_i} dX_i + \frac{\partial P}{\partial t} dt = \frac{\partial P}{\partial t} dt \Rightarrow \boxed{\frac{DP}{Dt} = \frac{\partial P}{\partial t}}$

POR SEGUIR EL MOVIMIENTO DE LA PARTICULA $X_i = cte \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial X_i} = 0$

"La derivada material de una propiedad expresada en forma lagrangiana coincide con la derivada parcial respecto al tiempo"

Expresión euleriana de P: $P(x_i, t) \Rightarrow DP = \frac{\partial P}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial P}{\partial t} dt = \frac{\partial P}{\partial x_i} v_i dt + \frac{\partial P}{\partial t} dt = \left(\frac{\partial P}{\partial x_i} v_i + \frac{\partial P}{\partial t}\right) dt \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{DP}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial P}{\partial t}}_{\text{VARIACION LOCAL}} + \underbrace{\frac{\partial P}{\partial x_i} v_i}_{\text{VARIACION CONVECTIVA O DE ARRASTRE O DE TRANSPORTE}}}$$

OPERADOR DE DERIVACION MATERIAL: $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}$

CARACTERISTICAS CINEMATICAS DEL MEDIO CONTINUO:

POSICION INSTANTANEA DE UNA PARTICULA: X_i

$$\vec{V} = \frac{D\vec{X}}{Dt}$$

VELOCIDAD INSTANTANEA DE UNA PARTICULA:
Derivada temporal de las ecuaciones del movto.

$$V_i = \frac{DX_i}{Dt} = \frac{D}{Dt}\left(X_i + u_i\right) = \frac{Du_i}{Dt} \Rightarrow \vec{V} = \frac{D\vec{u}}{Dt}$$

CAMPO DE VELOCIDAD INSTANTANEO

$$V_i(\bar{X}\,t) = \frac{\partial x_i(\bar{X}\,t)}{\partial t}$$

$$u_i = u_i(X, t) \Rightarrow V_i = \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} \Rightarrow \vec{V} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$$

$$u_i = u_i(x, t) \Rightarrow v_i = \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Rightarrow \vec{V} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\nabla u_i}$$

gradiente de la componente u_i

EXPRESION IMPLICITA AL APARECER LA VELOCIDAD EN AMBOS TERMINOS

ACELERACION INSTANTANEA DE UNA PARTICULA:
Derivada material del campo de velocidades

$$a_i = \frac{DV_i}{Dt} \Rightarrow \vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

$$V_i = V_i(X, t) \Rightarrow a_i = \frac{DV_i}{Dt} = \frac{\partial V_i}{\partial t} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

$$V_i = V_i(x, t) \Rightarrow a_i = \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\nabla V_i}$$

gradiente de la componente V_i

Ecuaciones del movimiento: $\left\{\begin{aligned} x_1 &= X_1 + X_2 t + X_3 t \\ x_2 &= X_2 + 2X_3 t \\ x_3 &= X_3 + 3X_1 t \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} v_1 &= X_2 + X_3 \\ v_2 &= 2X_3 \\ v_3 &= 3X_1 \end{aligned}\right.$

Descripción espacial de una propiedad: $\rho(\mathbf{x},t) = 3x_1 + 2x_2 + 3t$

Descripción material:

$$\rho(\mathbf{x},t) = 3x_1 + 2x_2 + 3t = 3(X_1 + X_2 t + X_3 t) + 2(X_2 + 2X_3 t) + 3t = 3X_1 + 3X_2 t + 7X_3 t + 2X_2 + 3t$$

Derivada material:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = 3X_2 + 7X_3 + 3$$

$$\nabla\rho = \left\{\begin{matrix} \partial\rho/\partial x_1 \\ \partial\rho/\partial x_2 \\ \partial\rho/\partial x_3 \end{matrix}\right. = \left\{\begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}\right.$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \bullet (\nabla\rho) = 3 + 3(X_2 + X_3) + 2(2X_3) = 3X_2 + 7X_3 + 3$$

Prof.: Javier Suárez Medina

Determinar la expresión material y espacial de la velocidad en el movimiento de un medio continuo dado por

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = e^t(X_2+X_3)/2 + e^{-t}(X_2-X_3)/2 \\ x_3 = e^t(X_2+X_3)/2 - e^{-t}(X_2-X_3)/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (x_2+x_3)e^{-t} = X_2+X_3 \\ (x_2-x_3)e^t = X_2-X_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = x_1 \\ X_2 = \frac{1}{2}[(x_2+x_3)e^{-t} + (x_2-x_3)e^t] \\ X_3 = \frac{1}{2}[(x_2+x_3)e^{-t} - (x_2-x_3)e^t] \end{cases}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} : \begin{cases} \textit{Lagrangiana}: \\ u_1 = 0 \\ u_2 = e^t(X_2+X_3)/2 + e^{-t}(X_2-X_3)/2 - X_2 \\ u_3 = e^t(X_2+X_3)/2 - e^{-t}(X_2-X_3)/2 - X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \textit{Euleriana}: \\ u_1 = 0 \\ u_2 = x_2 - \frac{1}{2}[(x_2+x_3)e^{-t} + (x_2-x_3)e^t] \\ u_3 = x_3 - \frac{1}{2}[(x_2+x_3)e^{-t} - (x_2-x_3)e^t] \end{cases}$$

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \Rightarrow v_i = \frac{Du_i}{Dt} \Rightarrow \begin{cases} \textit{Lagrangiana} \quad v_i = \dfrac{\partial u_i}{\partial t} \\ \textit{Euleriana} \quad v_i = \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + v_j \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} \end{cases}$$

$$\textit{Lagrangiana}: \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = e^t(X_2+X_3)/2 - e^{-t}(X_2-X_3)/2 \\ v_3 = e^t(X_2+X_3)/2 + e^{-t}(X_2-X_3)/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = -\frac{1}{2}[-(x_2+x_3)e^{-t} + (x_2-x_3)e^t] \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t} = -\frac{1}{2}[-(x_2+x_3)e^{-t} - (x_2-x_3)e^t] \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla u_1 = \left\{ 0 \quad 0 \quad 0 \right\} \\ \nabla u_2 = \left\{ 0 \quad 1 - \dfrac{e^{-t}+e^t}{2} \quad \dfrac{-e^{-t}+e^t}{2} \right\} \\ \nabla u_3 = \left\{ 0 \quad \dfrac{-e^{-t}+e^t}{2} \quad 1 - \dfrac{e^{-t}+e^t}{2} \right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = -\frac{1}{2}[-(x_2+x_3)e^{-t} + (x_2-x_3)e^t] + v_2\left(1 - \dfrac{e^{-t}+e^t}{2}\right) + v_3\left(\dfrac{-e^{-t}+e^t}{2}\right) \\ v_3 = -\frac{1}{2}[-(x_2+x_3)e^{-t} - (x_2-x_3)e^t] + v_2\left(\dfrac{-e^{-t}+e^t}{2}\right) + v_3\left(1 - \dfrac{e^{-t}+e^t}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = x_3 \\ v_3 = x_2 \end{cases}}$$

Prof. Javier Suárez Medina

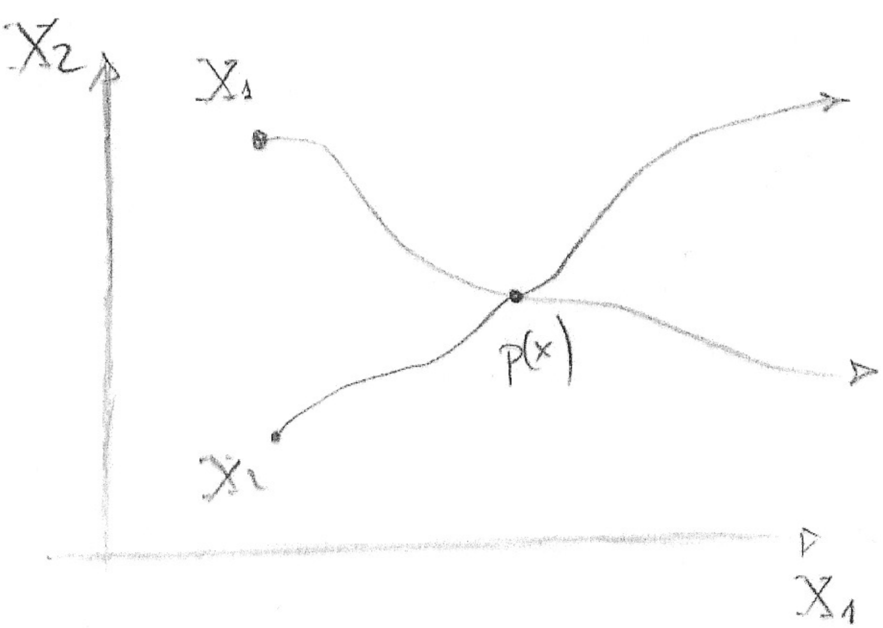
Una propiedad es estacionaria cuando su descripción espacial no depende del tiempo.
Movimiento estacionario: el campo de velocidades es independiente del tiempo

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \frac{\partial v(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \mathbf{0}$$

La independencia del tiempo de la descripción espacial supone que para un mismo punto del espacio, la propiedad en cuestión no varía a lo largo del tiempo.

Esto no implica que para una misma partícula la propiedad no varie con el tiempo: **la descripción material puede depender del tiempo**.

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(\mathbf{X},t)) = \mathbf{V}(\mathbf{X},t)$$



Densidad estacionaria:
dos partículas varían su
densidad a lo largo del
tiempo pero al pasar por
el punto toman el mismo
valor
el observador exterior al
medir la densidad en
el punto será siempre
la misma.

Justificar si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

Si el campo de velocidades es estacionario, el campo de aceleraciones también lo es.

$$\textit{Campo de velocidades estacionario}: \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x},t) = \frac{D\mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x})$$

$CIERTA$: *la expresión resultante no depende del tiempo*

Si el campo de velocidades es uniforme, el campo de aceleraciones es siempre nulo.

$$\textit{Campo de velocidades uniforme (homogéneo)}: \forall t \Rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{x},t) = cte. \Rightarrow \mathbf{v}(t)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{a}(\mathbf{x},t) = \frac{D\mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x},t) \\ \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \nabla\mathbf{v}(t) = \frac{\partial v_i(t)}{\partial x_j} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \mathbf{a}(\mathbf{x},t) = \frac{\partial \mathbf{v}(t)}{\partial t}$$

$FALSA$: *no tiene por que ser cero*

Si el campo de velocidades es estacionario y el medio es incompresible, el campo de aceleraciones es siempre nu

$$\textit{Campo de velocidades estacionario}: \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{x});\ \textit{Medio incompresible} \Rightarrow \nabla\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x},t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}) \neq 0$$

$FALSA$: *que la divergencia de la velocidad sea nula no implica que tambien lo sea el gradiente*